

第五届 Xionger 网络数学竞赛试卷

(高中数学组, 2022 年 9 月 10 日至 9 月 12 日)

考试时间: 2022 年 9 月 10 日上午 9 点至 9 月 12 日晚上 21 点

官方微信公众号: Xionger 的数学小屋

每题暂不设分值, 希望诸位尽可能多地作答。试题解答请及时发送到邮箱 2609480070@qq.com, 逾期将取消参赛资格。要求解答字迹清楚, 排版美观, 推荐采用 PDF 文档格式提交, 文件命名: 高中数学组 + 昵称 (或姓名) + 学校。

1. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 有二阶导数 $f''(x)$. 已知 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f''(x) > 0$, 且 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = f'(x_0) < 0$, 证明 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$.

北京邮电大学, 哈士奇 供题

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{15}{11}, a_{n+1} = a_n - \ln a_n$, 求证:

(1) $\{a_n\}$ 为单调递减数列;

$$(2) \frac{13^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-1}}}{13^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-1}}} \leq a_n \leq 1 + \frac{2 \times 6^{2^{n-1}}}{6^{2^n} - 2^{2^{n-1}+1} \cdot 3^{2^{n-1}-1} + 1}.$$

北京邮电大学, 哈士奇 供题

3. 已知 a, b, c, d, e 均为实数, 且满足 $a + 3b + 5c + 7d + 9e = \sqrt{26}$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + (a + b + c + d + e)^2$ 的最小值.

湖南大学, 柯熙不懂事 供题

4. 已知椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 椭圆的两个焦点为 F_1, F_2 . 过 F_2 作一条动直线 l , 直线不与 x 轴重合. 直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 连接 AF_1, BF_1 . 试探究: 当直线 l 运动时, $\triangle AF_1B$ 的顶点 F_1 所对的旁心 I_{F_1} 的轨迹.

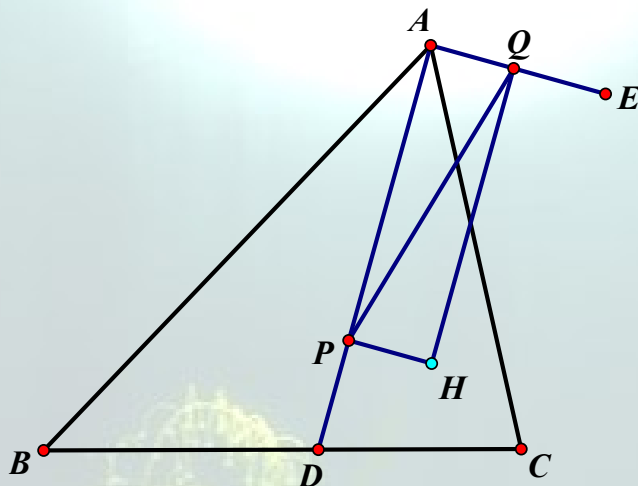
湖南大学, 柯熙不懂事 供题

5. 试证明:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 + k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > \frac{\sqrt{2}n(n+1)}{2}.$$

家里蹲大学, Dylen 供题

6. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD, AE 分别为三角形的内外角平分线, 点 H 是三角形的垂心. 点 H 在 AD, AE 上的射影分别为点 P, Q . 证明: 直线 PQ 经过 BC 边的中点.



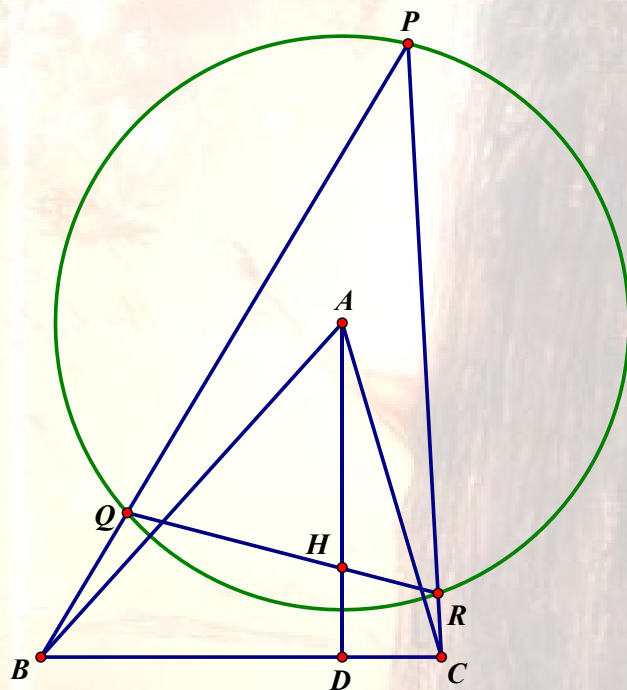
(答题时请将图画在答卷纸上)

湖南大学, 柯熙不懂事 供题

7. 现将 XOY 平面上的每一个点都进行染色处理, 每个点只能被染成红色黄色、蓝色中的一种颜色, 点与点之间可以连线. 证明: 无论染色方案如何, 在 XOY 平面上总是能够找到一类三角形它们满足如下条件:
- 它们是相似三角形;
 - 它们的相似比是 2022;
 - 它们是同色三角形 (三角形的三个顶点颜色相同).

湖南大学, 柯熙不懂事 供题

8. 如图所示, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, H 是垂心, D 是垂足, 设 $R = \sqrt{HA \cdot AD}$. 以 A 作为圆心, R 为半径作一圆 Ω , 在圆 Ω 上任意选取一点 P , 直线 PB, PC 交圆 Ω 于点 Q, R . 证明: R, H, Q 三点共线.



湖南大学, 柯熙不懂事 供题

9. 设三角形的三个顶点为 A, B, C . \sum_{cyc} 表示轮换求和, 回答以下问题:

(a) 若三角形 ABC 是锐角三角形, 证明

$$\sum_{cyc} \frac{\cot A}{1 - \cot B \cot C} > \frac{5}{2}$$

(b) 求最大的实数 k 的取值, 使得对于任意三角形 ABC 都有

$$\sum_{cyc} \frac{\cot A}{1 - \cot B \cot C} \geq k$$

恒成立.

湖南大学, 柯熙不懂事 供题

10. 将 $n \times n$ 的方格表进行红蓝二染色, 使得任意 2 行 3 列或 3 行 2 列相交所得的 6 个方格一定不全同色. 求 n 的最大值.

湖南大学, 柯熙不懂事 供题

“

德国有Springer, 我国有Xionger

”



Xionger的数学小屋
长按识别二维码, 关注我的小屋

官方微信公众号: Xionger 的数学小屋