第五届 Xionger 网络数学竞赛试卷

(非数学组, 2022 年 9 月 10 日至 9 月 12 日)

考试时间：2022 年 9 月 10 日上午 9 点至 9 月 12 日晚上 21 点
官方微信公众号：**Xionger 的数学小屋**

本试卷包含的题量较大，祝福每位选手都能寻找到适合自己解答、乐在其中的试题。

每题暂不设分值，希望诸位尽可能多地作答。试题解答请及时发送到邮箱 2609480070@qq.com, 逾期将取消参赛资格. 要求解答字迹清楚, 排版美观, 推荐采用 PDF 文档格式提交, 文件命名: **非数学组 + 昵称（或姓名）+ 学校**.

---

1. (a) 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x\sin\left(x\sin\left(x\sin\cdots\right)\right)\right)\mathrm{d}x.$$

(b) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{n\left(n+i\right)}\cdot\sin\frac{1}{n}\cdot\arctan\frac{i}{n}\cdot\ln\left(1+e^{\frac{k}{n}}\right).$$

(c) 设 $\mathbb{R}^4$ 中的方体 $Q=\{(x,y,\varphi,\theta)\,|0\leqslant x,y,\varphi,\theta\leqslant\pi\}$, 求

$$\iiiint_Q \frac{\sin x\sin\varphi}{x\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

(d) 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\Gamma\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sqrt{\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}\right)\mathrm{d}x.$$

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

2. 设 $\mathfrak{m}\in\mathbb{R}^+$,

$$u\left(x\right)=\int_x^{x+1}\ln\Gamma\left(t\right)\mathrm{d}t-\left(\mathfrak{m}-1\right)\left(x-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2}{2\pi}\right)$$

在 $\mathbb{R}^+$ 上存在唯一不变号零点. 函数

$$R\left(x\right)=\int_x^{x+1}\ln\Gamma\left(t\right)\mathrm{d}t-\ln\left(x+1\right)+x,\quad x\in(0,1)$$

设 p,q 都是不超过 10 的正整数, $p\neq q$, 求所有的有序对 (p,q), 满足

$$R\left(x\right)>\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{e}}-\ln\frac{|p-q|}{\sqrt{2\pi}\cdot\mathfrak{m}^{p-q}}$$

在区间 $(0,1)$ 恒成立.

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题

3. (1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数, 若 $\ln f(x)$ 是凸 (凹) 函数, 则称 f 是对数-凸 (对数-凹) 的, 证明: Gamma 函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是对数-凸的.

(2) 证明 Gautschi's 不等式

$$x^{1-s}<\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)}<(x+1)^{1-s}, x>0, 0<s<1.$$

(3) 设 $\alpha>0$, 研究级数 $\sum\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k)}$ 的敛散性.

屋寒大学, **BaireMath** 供题

4. 设 $\boldsymbol{f}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^2 映射. $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 Jacobi 矩阵, 它的元素为 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), i,j=1,2,\cdots,n$. 在 Jacobi 行列式 $\det(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 中对应的代数余子式为 $A_{ij}(\boldsymbol{x}), i,j=1,2,\cdots,n$. 证明如下的 Hadamard 恒等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0, j=1,2,\cdots,n.$$

屋寒大学, **BaireMath** 供题

5. 设 f 在 $[0,1]$ 上 n 阶连续可微, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

屋寒大学, **BaireMath** 供题

6. 求所有满足下述条件的实数 $a\in\mathbb{R}$: 存在可微函数 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 使得

$$f'(x)=f(x+a),\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

7. 设 $(a_n)_{n\geq1}$ 和 $(b_n)_{n\geq1}$ 是正实数列, 且满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=a\in\mathbb{R}_{>0},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{nb_n}=b\in\mathbb{R}_{>0}.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}-\frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}}\right).$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

8. 试证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^n |\sin(\pi x)|^x\,dx=\sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

家里蹲大学, **Dylen** 供题

9. Let n be any positive integer. Show that

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-2\sin\theta)d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}.$$

云南大学, **Ulyanov Aleksandrov** 供题

10. 定义一个 Fibonacci 数列, 满足 $F_1=1$, $F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $\forall n\geqslant 3$. 对每一个固定的 $k\geqslant 1$, $k\in\mathbb{N}^+$, 定义一个新的数列 $\left\{\dfrac{F_{m_0+nk}}{F_{m_0+(n+1)k}}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ $(m_0=0,1,\cdots,k-1)$.

证明: 这个新的数列收敛, 并求出收敛的极限.

兰州大学, **按定义易证** 供题

11. 特别附加题【童年回忆之神秘湖探险】

神秘湖坐落于阳光牧场的西南方, 前往神秘湖的码头, 南部尽头就是阳光海滩.

(I) 神秘湖近日遭受了暴雨的袭击, 神秘湖码头的道路上积水已经达到一米, 甚至有湖里的鱼儿游上岸来. 为了尽可能快排水, 城堡大厅的洛克行政官决心紧急调用 5 台抽水机, 去神秘湖码头抽水. 设抽水机抽水管横截面 S 是一个半径为 R 的圆形, $S=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant R^2\}$. 平面不可压缩定常水流由速度向量

$$V = xu(x.y)\boldsymbol{i} + yu(x,y)\boldsymbol{j},$$

其中 $u(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=v(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ |u(x,y)|\leqslant 2+\arctan(x^2+y^2), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(0,0)=2, \\ |v(x,y)|\leqslant \dfrac{\ln(1+x^4+y^4)}{\ln(2+x^2+y^2)}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ v(0,0)=0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=v(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

求经过区域 S 边界 ∂S 流出的水流体的量 M.

(II) 暴雨过后的第二天, 黄昏, 摩乐乐、丫丽、布多多、布少少一行四人在神秘湖旁边散步. 忽然, 他们在沙滩上发现了一个奇怪的沙画, 只见上面写着

$$e^{i\pi}+1=0$$

(1) 布少少表示他不明白这是什么东西, 丫丽解释说 i 是虚数单位, 可以使用 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ \theta\in\mathbb{R}$ 来得到沙画的式子.

第二天夜晚, 众人再次齐聚神秘湖岸边. 摩乐乐表示他回忆起 Fourier 级数表达式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad x\in(-\pi,\pi)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

他认为这可以写成

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_ne^{inx}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

请你证明摩乐乐想法的合理性.

(2) 历经几个晚上的互相交流讨论以及证明推理，他们每一个人都得出了小结论. 请你通过证明判断这些结论是否正确.

布少少:

$$\sum_{-N\le n\le N} e^{int} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

布多多:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{-m\le n\le m} e^{int} = \frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

摩乐乐:

$$\sum_{-N\le n\le N} \operatorname{sign}(n)e^{int} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

丫丽: 假设黎曼可积函数 f 有 Fourier 级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

并且 a_n 满足

$$|na_n|\le C \quad C>0$$

则对任意正整数 N 均有

$$\left|\sum_{|n|\le N} a_n e^{inx}\right|\le \sup|f|+(2-\ln(N+2)+\ln(N+1))\,C$$

其中 $\sup|f|$ 表示 $|f|$ 的最大值.

曲阜师范大学, **Alina Lagrange** 供题