第五届 Xionger 网络数学竞赛试卷

(数学低年级组, 2022 年 9 月 10 日至 9 月 12 日)

考试时间：2022 年 9 月 10 日上午 9 点至 9 月 12 日晚上 21 点
官方微信公众号：**Xionger 的数学小屋**

本试卷包含的题量较大，祝福每位选手都能寻找到适合自己解答、乐在其中的试题。

每题暂不设分值，希望诸位尽可能多地作答。试题解答请及时发送到邮箱 2609480070@qq.com, 逾期将取消参赛资格. 要求解答字迹清楚, 排版美观, 推荐采用 PDF 文档格式提交, 文件命名: **数学低年级组 + 昵称（或姓名）+ 学校**.

---

1. (1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数, 若 $\ln f(x)$ 是凸 (凹) 函数, 则称 f 是对数-凸 (对数-凹) 的, 证明: Gamma 函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上是对数-凸的.

(2) 证明 Gautschi's 不等式

$$x^{1-s}<\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)}<(x+1)^{1-s},\, x>0, 0<s<1.$$

(3) 设 $\alpha>0$, 研究级数 $\sum \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k)}$ 的敛散性.

屋寒大学, **BaireMath** 供题

2. 设 $\boldsymbol{f}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^2 映射. $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 Jacobi 矩阵, 它的元素为 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), i,j=1,2,\cdots,n$. 在 Jacobi 行列式 $\det(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 中对应的代数余子式为 $A_{ij}(\boldsymbol{x}), i,j=1,2,\cdots,n$. 证明如下的 Hadamard 恒等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0, j=1,2,\cdots,n.$$

屋寒大学, **BaireMath** 供题

3. 设 f 在 $[0,1]$ 上 n 阶连续可微, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{(2n+1)4^n(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

屋寒大学, **BaireMath** 供题

4. 求所有满足下述条件的实数 $a \in \mathbb{R}$: 存在可微函数 $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 使得

$$f'(x) = f(x+a), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

5. 设 $(a_n)_{n\geq 1}$ 和 $(b_n)_{n\geq 1}$ 是正实数列, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{n} = a \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{nb_n} = b \in \mathbb{R}_{>0}.$$

计算

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} - \frac{a_n}{\sqrt[n]{b_n}} \right).$$

湖州师范学院, **阿渣** 供题

6. 试证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n |\sin(\pi x)|^x \, dx = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

家里蹲大学, **Dylen** 供题

7. Let n be any positive integer. Show that

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - 2\sin\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}.$$

云南大学, **Ulyanov Aleksandrov** 供题

8. 定义一个 Fibonacci 数列, 满足 $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geqslant 3$. 对每一个固定的 $k \geqslant 1,\ k \in \mathbb{N}^+$, 定义一个新的数列 $\left\{ \dfrac{F_{m_0+nk}}{F_{m_0+(n+1)k}} \right\}_{n=0}^{+\infty}$ $(m_0 = 0, 1, \cdots, k-1)$.

证明: 这个新的数列收敛, 并求出收敛的极限.

兰州大学, **按定义易证** 供题